数理解析研究所講究録
第 1547 巻 2007 年 87-93

Oscillation constants of nonlinear differential equations with delay

上智大学・理工学部　山岡直人 (Naoto Yamaoka)
Department of Mathematics,
Sophia University

時間遅れをもつ２階非線形微分方程式

$$(|x'(t)|^{\alpha-1}x'(t))' + \left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^{\alpha+1}\frac{1}{t^{\alpha+1}}|x(t)|^{\alpha-1}x(t) + a(t)f(x(ct)) = 0 \tag{1}$$

の振動問題を考える．ただし，$' = d/dt, \alpha > 0, 0 < c \leq 1$, 関数 $a(t)$ は区間 $(0,\infty)$ で非負値連続かつ局所有界変動であり，関数 $f(y)$ は実数値連続かつ初期値に関する解の一意性を保証できるぐらい滑らかで $yf(y) > 0\ (y \neq 0)$ を満たすものとする．このとき，方程式 (1) の全ての解は大域的に存在する ([7, Theorem 2.1] 参照).

方程式 (1) の解が振動するとは，解が発散する無限個の零点をもつことをいい，逆に零点が有限個のとき，振動しないという．

半分線形微分方程式

$$(|x'|^{\alpha-1}x')' + \frac{\lambda}{t^{\alpha+1}}|x|^{\alpha-1}x = 0 \tag{2}$$

を考える．このとき，$\lambda > (\alpha/(\alpha+1))^{\alpha+1}$ ならば，方程式 (2) の全ての解は振動し，$\lambda \leq (\alpha/(\alpha+1))^{\alpha+1}$ ならば，方程式 (2) は振動しない解をもつことがよく知られている（[1, 3] 参照）．したがって，定数 $(\alpha/(\alpha+1))^{\alpha+1}$ は，方程式 (2) の全ての解が振動するようなパラメータ λ の下限である．そのような値は，一般に振動定数と呼ばれる（[5, 6] 参照）．

方程式 (2) の振動定数から，方程式 (1) は，丁度，振動しない解をもつ方程式に，(時間遅れ) 非線形摂動項を加えたものといえる．まず，そのような方程式に対する過去の研究から，方程式 (1) に含まれる定数 α と c が解の振動にどのような影響を与えるのかについて考察する．そこで，関数 $a(t), f(y)$ がそれぞれ

$$a(t) = \frac{1}{t^{\alpha+1}(\log t)^2}, \quad f(y) = \delta|y|^{\alpha-1}y \ \ (\delta > 0)$$

を満たすとする．このとき，方程式 (1) は時間遅れをもつ非線形微分方程式

$$(|x'(t)|^{\alpha-1}x'(t))' + \left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^{\alpha+1}\frac{1}{t^{\alpha+1}}|x(t)|^{\alpha-1}x(t) + \frac{\delta}{t^{\alpha+1}(\log t)^2}|x(ct)|^{\alpha-1}x(ct) = 0 \tag{3}$$

になる．

(i) $\alpha = 1$ のとき，方程式 (3) は時間遅れをもつ線形微分方程式

$$x''(t) + \frac{1}{4t^2}x(t) + \frac{\delta}{t^2(\log t)^2}x(ct) = 0 \tag{4}$$

になる．方程式 (4) の振動問題は Sugie and Iwasaki [4] によって議論されており，全ての解が振動するための必要十分条件は $\delta > 1/(4\sqrt{c})$ であることが示された．

(ii) $c = 1$ のとき，方程式 (3) は時間遅れを含まない方程式

$$(|x'|^{\alpha-1}x')' + \frac{1}{t^{\alpha+1}}\left\{\left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^{\alpha+1} + \frac{\delta}{(\log t)^2}\right\}|x|^{\alpha-1}x = 0 \tag{5}$$

になる．方程式 (5) の振動問題は Elbert and Schneider [2] によって研究されており，全ての解が振動するための必要十分条件は $\delta > (\alpha/(\alpha+1))^{\alpha}/2$ であることが示された．

これらの必要十分条件から，遅れが大きければ（c が小さければ），方程式 (3) の解は振動し難く，指数 α が大きければ，方程式 (3) の解は振動し易いと推測できる．最近，このような定数 c と α の影響を考慮して，方程式 (3) にも適用できる方程式 (1) の振動定理（全ての解が振動するための十分条件）が与えられた．

定理 A ([7, Theorem 1.1] の系). 関数 $a(t)$ は十分大きな t に対して

$$a(t) \geq \frac{1}{t^{\alpha+1}(\log t)^2}$$

を満たし，関数 $f(y)$ は十分大きな $|y|$ に対して

$$\frac{f(y)}{|y|^{\alpha-1}y} \geq \delta > \frac{1}{2c^{\alpha^2/(\alpha+1)}}\left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^{\alpha}$$

を満たす δ が存在するものとする．このとき，方程式 (1) の全ての非自明解は振動する．

定理 A から，

$$\delta > \frac{1}{2c^{\alpha^2/(\alpha+1)}}\left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^{\alpha}$$

ならば，方程式 (3) の全ての解は振動するが，非振動定理（振動しない解をもつための十分条件）を伴わない限り，定数

$$\frac{1}{2c^{\alpha^2/(\alpha+1)}}\left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^{\alpha}$$

が方程式 (3) の振動定数であるかどうかは判定できない．そこで，この論文では，方程式 (1) の非振動定理を与え，その定数が方程式 (3) の振動定数であることを示す．以下が，主定理である．

定理 1. 関数 $a(t)$ は十分大きな t に対して

$$0 \le a(t) \le \frac{1}{t^{\alpha+1}(\log t)^2} \tag{6}$$

を満たし，関数 $f(y)$ は単調増加であり，$y > 0$ または $y < 0$ で $|y|$ が十分大きいとき

$$\frac{f(y)}{|y|^{\alpha-1}y} \le \delta < \frac{1}{2c^{\alpha^2/(\alpha+1)}}\left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^{\alpha} \tag{7}$$

を満たす δ が存在するものとする．このとき，方程式 (1) は振動しない解をもつ．

証明. 条件 (7) から，定理 1 は $y > 0$ と $y < 0$ の場合について証明しなければならないが，一方については同様に行うことができるので，$y > 0$ についてのみ証明を行う．

Elbert and Schneider [2, Corollary 1] より，微分方程式

$$(|y'|^{\alpha-1}y')' + \frac{1}{t^{\alpha+1}}\left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^{\alpha+1}|y|^{\alpha-1}y + \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^{\alpha}\frac{1}{t^{\alpha+1}(\log t)^2}|y|^{\alpha-1}y = 0 \tag{8}$$

は

$$y(t) = t^{\alpha/(\alpha+1)}(\log t)^{1/(\alpha+1)}(M_1 + O(1/\log t)) \quad \text{as } t \to \infty \tag{9}$$

を満たす振動しない解 $y(t)$ を持つことがすでに示されている．ただし，$M_1 \ne 0$ であり，O はランダウの記号である．なお，$-y(t)$ も方程式 (8) の解であることから，$M_1 > 0$ として考えてもよい．このとき，$y(t)$ は十分大きな t に対して正である．

条件 (7) より，

$$\delta < \frac{1}{2c^{\alpha^2/(\alpha+1)}}\left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^{\alpha}\left(\frac{1-\varepsilon_0}{1+\varepsilon_0}\right)^{\alpha}, \qquad 0 < \varepsilon_0 < 1 \tag{10}$$

を満足する ε_0 が存在し，条件 (9) より，十分大きな t に対して，

$$\left|\frac{y(t)}{t^{\alpha/(\alpha+1)}(\log t)^{1/(\alpha+1)}} - M_1\right| < \frac{M_2}{\log t}$$

を満たす $M_2 > 0$ が存在するので，$y(t)$ はある $t_0 > 0$ に対して，

$$\left|\frac{y(t)}{t^{\alpha/(\alpha+1)}(\log t)^{1/(\alpha+1)}} - M_1\right| < M_1\varepsilon_0 \quad \text{for } t \ge t_0$$

を満たす．したがって，

$$(1-\varepsilon_0)M_1 t^{\alpha/(\alpha+1)}(\log t)^{1/(\alpha+1)} < y(t) < (1+\varepsilon_0)M_1 t^{\alpha/(\alpha+1)}(\log t)^{1/(\alpha+1)} \quad \text{for } t \ge t_0$$

となるので，

$$\frac{y(t)}{y(ct)} > \frac{(1-\varepsilon_0)M_1 t^{\alpha/(\alpha+1)}(\log t)^{1/(\alpha+1)}}{(1+\varepsilon_0)M_1 (ct)^{\alpha/(\alpha+1)}(\log(ct))^{1/(\alpha+1)}} > \frac{1-\varepsilon_0}{1+\varepsilon_0}\frac{1}{c^{\alpha/(\alpha+1)}} \quad \text{for } t \ge t_1 \tag{11}$$

を得る．ただし，$t_1 = t_0/c$ である．

ここで，方程式 (8) の解が

$$y'(t) \geq 0 \quad \text{for } t \geq t_0 \quad \text{and} \quad \lim_{t\to\infty} y'(t) = 0 \tag{12}$$

であることを示す．そのため，まず，$y'(t_2) < 0$ となる $t_2 \geq t_0$ が存在すると仮定する．関数 $y(t)$ は $t \geq t_0$ であり，方程式 (8) の解なので，

$$\begin{aligned}(|y'(t)|^{\alpha-1}y'(t))' &= -\frac{1}{t^{\alpha+1}}\left(\left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^{\alpha+1} + \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^{\alpha}\frac{1}{(\log t)^2}\right)|y(t)|^{\alpha-1}y(t)\\ &< 0 \quad \text{for } t \geq t_0\end{aligned}$$

を満たす．したがって，

$$|y'(t)|^{\alpha-1}y'(t) \leq |y'(t_2)|^{\alpha-1}y'(t_2) \quad \text{for } t \geq t_2$$

であり，$y'(t) \leq y'(t_2)$ $(t \geq t_2)$ となる．よって，

$$y(t) < y'(t_2)(t-t_2) + y(t_2) \to -\infty \quad \text{as } t \to \infty$$

となるので，$y(t)$ が $t \geq t_0$ で正であることに反する．ゆえに，$y'(t) \geq 0$ $(t \geq t_0)$ である．次に，$\lim_{t\to\infty} y'(t) = 0$ であることを示す．関数 $y(t)$ $(t \geq t_0)$ は正値であり，方程式 (8) を満たすので，$y'(t)$ は $t \geq t_0$ で減少する．よって，$y'(t) \searrow \alpha$ $(t \to \infty)$ を満たす非負値定数 α が存在する．もし，$\alpha > 0$ ならば，$y(t) \geq \alpha(t-t_0) + y(t_0)$ となり，(9) に矛盾するので，$\alpha = 0$ である．

簡単のため，

$$q(t) = \left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^{\alpha+1}\frac{1}{t^{\alpha+1}}$$

と置く．このとき，方程式 (8) の両辺を t から $\tilde{t}(> t)$ まで積分すると，

$$\begin{aligned}|y'(\tilde{t})|^{\alpha-1}y'(\tilde{t}) - |y'(t)|^{\alpha+1}y'(t) = -\int_t^{\tilde{t}}\Bigg(&q(s)|y(s)|^{\alpha-1}y(s)\\ &+\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^{\alpha}\frac{1}{s^{\alpha+1}(\log s)^2}|y(s)|^{\alpha-1}y(s)\Bigg)ds\end{aligned}$$

となる．したがって，$\tilde{t} \to \infty$ とすれば，(12) より，関数 $y(t)$ は

$$\begin{aligned}|y'(t)|^{\alpha-1}y'(t) = \int_t^{\infty}\Bigg(&q(s)|y(s)|^{\alpha-1}y(s)\\ &+\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^{\alpha}\frac{1}{s^{\alpha+1}(\log s)^2}|y(s)|^{\alpha-1}y(s)\Bigg)ds \quad \text{for } t \geq t_0\end{aligned}$$

を満たす．条件 (6), (7), (10), (11) によって，

$$\begin{aligned}
|y'(t)|^{\alpha-1}y'(t) &= \int_t^\infty \Bigg(q(s)|y(s)|^{\alpha-1}y(s) \\
&\qquad + \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^\alpha \frac{1}{s^{\alpha+1}(\log s)^2}\left(\frac{y(s)}{y(cs)}\right)^\alpha y(cs)^\alpha\Bigg)ds \\
&\geq \int_t^\infty \Bigg(q(s)|y(s)|^{\alpha-1}y(s) \\
&\qquad + \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^\alpha \frac{1}{s^{\alpha+1}(\log s)^2}\left(\frac{1-\varepsilon_0}{1+\varepsilon_0}\right)^\alpha \frac{1}{c^{\alpha^2/(\alpha+1)}}y(cs)^\alpha\Bigg)ds \\
&> \int_t^\infty \left(q(s)|y(s)|^{\alpha-1}y(s) + a(s)\,\delta\, y(cs)^\alpha\right)ds \\
&\geq \int_t^\infty \left(q(s)|y(s)|^{\alpha-1}y(s) + a(s)\frac{f(y(cs))}{y(cs)^\alpha}y(cs)^\alpha\right)ds \\
&= \int_t^\infty \left(q(s)|y(s)|^{\alpha-1}y(s) + a(s)f(y(cs))\right)ds \qquad \text{for } t \geq t_1
\end{aligned}$$

となる．ゆえに，$y(t)$ は

$$y'(t) > \left(\int_t^\infty \left(q(s)|y(s)|^{\alpha-1}y(s) + a(s)f(y(cs))\right)ds\right)^{1/\alpha} \qquad \text{for } t \geq t_1 \tag{13}$$

を満たす．

関数列 $\{x_n\}, \{w_n\}$ を

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= y(t) \quad \text{for } t \geq t_0, \\
w_1(t) &= y'(t) \quad \text{for } t \geq t_1, \\
w_{n+1}(t) &= \left(\int_t^\infty \left(q(s)|x_n(s)|^{\alpha-1}x_n(s) + a(s)f(x_n(cs))\right)ds\right)^{1/\alpha} \quad \text{for } t \geq t_1, \\
x_{n+1}(t) &= \begin{cases} y(t) & \text{for } t_0 \leq t \leq t_1, \\ \displaystyle\int_{t_1}^t w_{n+1}(s)ds + y(t_1) & \text{for } t > t_1 \end{cases}
\end{aligned}$$

と定義する．このとき，

$$\begin{aligned}
0 < w_{n+1}(t) \leq w_n(t), &\quad \text{for } t \geq t_1 \\
0 < x_{n+1}(t) \leq x_n(t), &\quad \text{for } t \geq t_0
\end{aligned} \tag{14}$$

が成り立つ．この事実を帰納法で示す．

関数 $y(t)$ は $t \geq t_0$ で正であるので，

$$\begin{aligned}
w_2(t) &= \left(\int_t^\infty \left(q(s)|x_1(s)|^{\alpha-1}x_1(s) + a(s)f(x_1(cs))\right)ds\right)^{1/\alpha} \\
&= \left(\int_t^\infty \left(q(s)|y(s)|^{\alpha-1}y(s) + a(s)f(y(cs))\right)ds\right)^{1/\alpha} \\
&> 0 \quad \text{for } t \geq t_1
\end{aligned}$$

であり，条件 (13) より

$$\begin{aligned} w_2(t) &= \left(\int_t^\infty \left(q(s)|x_1(s)|^{\alpha-1}x_1(s) + a(s)f(x_1(cs))\right) ds\right)^{1/\alpha} \\ &= \left(\int_t^\infty \left(q(s)|y(s)|^{\alpha-1}y(s) + a(s)f(y(cs))\right) ds\right)^{1/\alpha} \\ &< y'(t) = w_1(t) \quad \text{for } t \geq t_1 \end{aligned}$$

となる．さらに，$w_2(t)$ は正なので，$x_2(t)$ の定義から，$x_2(t)$ は正であり，

$$\begin{aligned} x_2(t) &= \int_{t_1}^t w_2(s)ds + y(t_1) \\ &\leq \int_{t_1}^t w_1(s)ds + y(t_1) = \int_{t_1}^t y'(s)ds + y(t_1) \\ &= y(t) - y(t_1) + y(t_1) = y(t) = x_1(t) \quad \text{for } t \geq t_1 \end{aligned}$$

を満たし，$t_0 \leq t \leq t_1$ のとき，$x_2(t) = y(t) = x_2(t)$ となる．したがって，$n = 1$ の場合，(14) は成立する．

次に，自然数 k に対して，(14) が成立すると仮定する．このとき，関数 f が単調増加であることから，

$$\begin{aligned} w_{k+2}(t) &= \left(\int_t^\infty \left(q(s)|x_{k+1}(s)|^{\alpha-1}x_{k+1}(s) + a(s)f(x_{k+1}(cs))\right) ds\right)^{1/\alpha} \\ &\leq \left(\int_t^\infty \left(q(s)|x_k(s)|^{\alpha-1}x_k(s) + a(s)f(x_k(cs))\right) ds\right)^{1/\alpha} = w_{k+1}(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{k+2}(t) &= \int_{t_1}^t w_{k+1}(s)ds + y(t_1) \\ &\leq \int_{t_1}^t w_k(s)ds + y(t_1) = x_{k+1}(t) \qquad \text{for } t \geq t_1 \end{aligned}$$

となる．関数 $x_{k+2}(t)$ の定義から，$t_0 \leq t \leq t_1$ のとき，$x_{k+2}(t) = y(t) = x_{k+1}(t)$ である．関数 $w_{k+2}(t)$ と $x_{k+2}(t)$ がそれぞれの定義域で正であることは明らかなので，$n = k+1$ のときも (14) は成立する．

ここで，$x(t) = \lim_{n\to\infty} x_n(t)$, $w(t) = \lim_{n\to\infty} w_n(t)$ と置く．このとき，$x_n(t)$ の定義から

$$x(t) = \lim_{n\to\infty} x_n(t) \geq \lim_{n\to\infty} x_n(t_1) = y(t_1) > 0 \qquad \text{for } t \geq t_1$$

である．評価式 (14) より，関数列 $\{x_n\}$ と $\{w_n\}$ には，単調収束定理を使うことができるので，関数 $x(t)$ と $w(t)$ はそれぞれ，

$$x(t) = \int_{t_1}^t w(s)ds + y(t_1) \qquad \text{for } t \geq t_1,$$

$$w(t) = \left(\int_t^\infty \left(q(s)|x(s)|^{\alpha-1}x(s) + a(s)f(x(cs))\right) ds\right)^{1/\alpha} \qquad \text{for } t \geq t_1$$

を満たす．したがって，$x(t)$ の両辺を微分すれば，

$$x'(t) = w(t) = \left(\int_t^\infty \left(q(s)|x(s)|^{\alpha-1}x(s) + a(s)f(x(cs))\right) ds\right)^{1/\alpha} > 0 \qquad \text{for } t \geq t_1$$

を得ることができる．この式の両辺を α 乗し，微分すれば，$x(t)$ は $t \geq t_1$ で

$$(x'(t)^\alpha)' + q(t)|x(t)|^{\alpha-1}x(t) + a(t)f(x(ct)) = 0$$

を満たすことが分かる．$x'(t) > 0$ ($t \geq t_2$) であることより，方程式 (1) は振動しない解 $x(t)$ をもつ．

参考文献

[1] O. Došlý, Oscillation criteria for half-linear second order differential equations, Hiroshima Math. J., **28** (1998), 507–521.

[2] Á. Elbert and A. Schneider, Perturbations of the half-linear Euler differential equation, Results in Mathematics, **37** (2000), 56-83.

[3] H.J. Li and C.C. Yeh, Nonoscillation criteria for second-order half-linear differential equations, Appl. Math. Lett., **8** (1995), 63-70.

[4] J. Sugie and M. Iwasaki, Oscillation of the Riemann-Weber version of Euler differential equations with delay, Georgian Math. J., **7** (2000), 577–584.

[5] J. Sugie, K. Kita and N. Yamaoka, Oscillation constant of second-order non-linear self-adjoint differential equations, Ann. Mat. Pura Appl. (4), **181** (2002), 309–337.

[6] C.A. Swanson, Comparison and Oscillation Theory of Linear Differential Equations, Academic Press, New York-London, 1968.

[7] N. Yamaoka and J. Sugie, Oscillation caused by delay perturbation in half-linear differential equations, Dynam. Systems Appl., **14** (2005), 365–380.